

第2讲 一元二次方程的实际应用

一、 增长率问题

设第一年的产量为 a ，年增长率为 x ，则第二年的产量为 $a(1+x)$ ，第三年的产量为 $a(1+x)^2$ 。

！总结：

若令基数为 a ，新数为 A ，增长率（下降率）为 x ，

则两次平均增长（下降）率问题的一般关系： $a(1 \pm x)^2 = A$

思考：

“翻一番”即增加了 1 倍的意思，就是原来的 2 倍，“翻两番”，即增加了 3 倍，原来的 4 倍

【备注】 可进一步进行一些举例：

求连续两年人口增长率，第一年 100 人，第三年 144 人；

求连续两轮降价的折扣，第一轮售价 2000 元，降价两轮售价 1280 元；

连续两年存款，连续两个月的拆迁等，只要两个月，都会出现平方。

解题时要注意审题，区分好题中给出的是第几次变化后的数据还是总数据；

第一季度：1~3 月 第二季度：4~6 月 第三季度：7~9 月 第四季度：10~12 月

 举个“栗子”

 栗子 1

1. 2016~2017 学年天津河北区初二下学期期末第 19 题 8 分 ★★★

为建设美丽的城市，某企业逐年增加对环境保护的经费投入，2014 年投入了 200 万元，2016 年投入了 288 万元。

(1) 求 2014 年至 2016 年该单位环保经费投入的年平均增长率。

(2) 该单位预计 2017 年投入环保经费 320 万元，若想继续保持前两年的年平均增长率，该目标能否实现？请通过计算说明理由。

【备注】 题中直接具体的给出了基数与新数，直接利用公式求解

【答案】 (1) 2014 年至 2016 年该单位环保经费投入的年平均增长率为 20%。

(2) 该目标无法实现。

【解析】 (1) 设 2014 年至 2016 年该单位环保经费投入的年平均增长率为 x ，

根据题意得， $200(1+x)^2 = 288$ ，

计算得出， $x_1 = 0.2 = 20\%$ ， $x_2 = -2.2$ （不符合题意，舍去）。

答：2014 年至 2016 年该单位环保经费投入的年平均增长率为 20%。

$$(2) \because 288 \times (1 + 20\%) = 345.6 > 320$$

$\therefore$ 若想继续保持前两年的年平均增长率，该目标无法实现。

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

栗子2

2. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第六十一中学初三上学期月考第5题 ★★

某农机厂四月份生产零件 50 万个，第二季度共生产零件 182 万个。设该厂五、六月份平均每月的增长率为 x ，那么 x 满足的方程是（ ）。

A. $50(1+x)^2 = 182$

B. $50 + 50(1+x) + 50(1+x)^2 = 182$

C. $50(1+2x) = 182$

D. $50 + 50(1+x) + 50(1+2x)^2 = 182$

【备注】 题中给出的第二季度的总零件数，需要将四、五、六月份都进行相加

【答案】 B

【解析】 依题意得该厂五、六月份的产量为 $50(1+x)$ 、 $50(1+x)^2$ 。

$$\therefore 50 + 50(1+x) + 50(1+x)^2 = 182.$$

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

栗子3

3. 2016~2017学年天津河北区初二下学期期末第9题3分 ★★

股票每天的涨、跌幅均不超过 10%，即当涨了原价的 10% 后，便不能再涨，叫做“涨停”；当跌了原价的 10% 之后，便不能再跌，叫做“跌停”。已知一只股票某天跌停，之后两天时间又涨回原价，若这两天次股票股价的平均增长率为 x ，则 x 满足的方程是（ ）。

A. $(1+x)^2 = \frac{11}{10}$

B. $(1+x)^2 = \frac{10}{9}$

C. $(1+x)^2 = \frac{10}{11}$

D. $(1+x)^2 = \frac{9}{10}$

【备注】 注意找好基数，在某天跌停之后，则这天为 $1 - 10\%$ ，然后在此基础上两天涨回原价 1

【答案】 B

【解析】 根据题意可得平均增长率为 x ，设原来的价格为 1，则跌停的价格为 $(1 - 10\%)$ ，根据之后两天又涨回原价，

$$\text{可列式子 } (1 - 10\%)(1+x)^2 = 1, \text{ 即 } (1+x)^2 = \frac{10}{9}.$$

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

二、利润问题

解决这类问题关键在于梳理清楚销售量随着单价的变化而变化的数量关系：

总利润 = 每件商品的利润 × 销售量 = 总收入 - 总支出

例如：

若一件商品进价为 40 元，当售价为每件 60 元时，每星期可售出 100 件；若售价每降低 1 元，就可多售出 5 件，则当售价降低 x 元时，可多售出 $5x$ 件，此时每周可售出 $100 + 5x$ 件，周利润为

思考：

若改为售价为 x 元，周利润该如何表示呢？

【备注】 周利润为： $(60 - x - 40)(100 + 5x)$ ；若改为售价为 x ，则周利润为 $(x - 40)[100 + 5(60 - x)]$

此类题目是考察难点，但是套路十分容易，只需要分别列出**新利润**、**新销量**的代数式，相乘即可。当求出两个根需要选择时，可以利用“薄利多销”进行选择。

解题时还要注意题中的未知数设的是降（涨）多少元还是售价为多少元；销量的变化要与题中变化的量对应上，比如说每上涨元，销量增加个，若上涨元，则销量增加个。实际问题中还要注意未知数的实际意义，注意结果的取舍。

栗子4

4. 2020~2021学年10月天津南开区天津市第五十中学初三上学期月考第24题 ★★

某超市销售一种饮料，平均每天可售出 100 箱，每箱利润为 120 元，为了扩大销售，增加利润，超市准备适当降价，据测算，若每箱降价 1 元，每天可多售出 2 箱，如果要使每天销售饮料获利 14000 元，问每箱应降价多少元？

【备注】 此题设降价为 x 元

【答案】 50 元 .

【解析】 设要使每天销售饮料获利 14000 元，每箱应降价 x 元，依据题意列方程得：

$$(120 - x)(100 + 2x) = 14000 ,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 70x + 1000 = 0 ,$$

$$\text{解得 } x_1 = 20 , x_2 = 50 .$$

∵ 扩大销售，

$$\therefore x = 50 .$$

答：每箱应降价 50 元，可使每天销售饮料获利 14000 元 .

【标注】 【知识点】一元二次方程的利润问题

5. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第23题 ★★★

俄罗斯世界杯足球赛期间，某商店销售一批足球纪念册，每本进价 40 元，规定销售单价不低于 44 元，且获利不高于 30%。试销售期间发现，当销售单价定为 44 元时，每天可售出 300 本，销售单价每上涨 1 元，每天销售量减少 10 本，现商店决定提价销售。设销售单价为 x 元。

(1) 填空：每本纪念册的利润为 _____，销售量是 _____，销售单价 x 的取值范围是 _____。

(2) 当每本足球纪念册销售单价是多少元时，商店每天获利 2400 元？

【备注】 此题设售价为 x 元，因此求解每天销量时，要先算出降价为多少

【答案】 (1) $(x - 40)$ ； $-10x + 740$ ； $40 \leq x \leq 52$

(2) 50。

【解析】 (1) 每本纪念册的进价为 40 元，销售单价为 x 元，

则每本纪念册的利润为： $(x - 40)$ 元，

当销售单价为 44 元时每天可销售 300 本，销售单价每上涨 1 元，每天销量减少 10

本，当售价为 x 时，销量为： $300 - 10(x - 44) = -10x + 740$ ，

又获利不高于 30%，则 $x \leq 40x(1 + 30\%)$ ，即 $x \leq 52$ ，

要有利润，则 $x \geq 40$ ，

故销售单价 x 的取值范围为： $40 \leq x \leq 52$ 。

(2) 根据题意得 $(x - 40)(-10x + 740) = 2400$ ，

解得 $x_1 = 50$ ， $x_2 = 64$ （舍去），

答：当每本足球纪念册销售单价是 50 元时，商店每天获利 2400 元。

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

6. 2020~2021学年10月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第20题8分 ★★

今年我国发生了较为严重的新冠肺炎疫情，口罩供不应求，某商店恰好年前新进了一批口罩，若按每个盈利 1 元销售，每天可售出 200 个，如果每个口罩的售价上涨 0.5 元，则销售量就减少 10 件，问应将每个口罩涨价多少元时，才能让顾客得到实惠的同时每天利润为 480 元？

【备注】 每涨 0.5 元，销量减少 10 件，即每涨 1 元，销量减少 20 件

【答案】 应将每件涨价 2 元时，才能让顾客得到实惠的同时每天利润为 480 元。

【解析】 设应将每件涨价 x 元时，才能让顾客得到实惠的同时每天利润为 480 元，

由题意得：

$$(1+x)\left(200 - \frac{x}{0.5} \times 10\right) = 480,$$

解得： $x_1 = 7$ ， $x_2 = 2$ ，

∴让顾客得到实惠，

∴ $x = 2$ ，

∴应将每件涨价 2 元时，才能让顾客得到实惠的同时每天利润为 480 元。

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

三、 传染问题

1. 传染问题

设 A 为传染源基数， x 为每人每次传染的人数， n 为传染的轮数，假设 x 不发生变化

则可得 n 轮后染病人数为： $A(1+x)^n$

思考：

卫生部疾病控制专家经过调研提出，如果 1 人传播了 10 人以上，而且被传染的人都已经确诊为新冠肺炎，那么这个传播者就可以称为“**超级传播者**”，即指上述公式中的 $x \geq 10$ 。不妨让 x 取最小值，即 $x = 10$ ，假如传染源就一个，即 $A = 1$ ，到现在为止传染了 3 轮，即 $n = 3$ ，我们来计算一下现在患病人数为多少。

假如不采取隔离，传染了 8 轮，患病人数又为多少？

【备注】 传染问题要注意最开始的基数会一直持续的进行传播，要与后续的枝干问题做好区分

传染 3 轮人数： $1 \times (1+10)^3 = 11^3 = 1311$

传染 8 轮人数： $1 \times (1+10)^8 = 11^8 = 214358881$

栗子7

7. 2019~2020 学年 9 月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第 22 题 ★★★

某种电脑病毒传播速度非常快，如果一台电脑被感染，经过两轮感染后就会有 81 台电脑被感染。请你用学过的知识分析，每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑？若病毒得不到有效控制，3 轮感染后，被感染的电脑会不会超过 700 台？

【备注】 需要现根据两轮感染的台数求出每台每轮感染多少，再计算第三轮

【答案】 会感染 8 台电脑，3 轮感染后，被感染的电脑会超过 700 台。

【解析】 设每轮感染中平均每一台电脑会感染 x 台电脑，依题意得：

$$1 + x + (1 + x)x = 81,$$

$$\text{整理得 } (1 + x)^2 = 81,$$

$$\text{则 } x + 1 = 9 \text{ 或 } x + 1 = -9,$$

$$\text{解得 } x_1 = 8, x_2 = -10 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore (1 + x)^2 + x(1 + x)^2 = (1 + x)^3 = (1 + 8)^3 = 729 > 700.$$

答：每轮感染中平均每一台电脑会感染 8 台电脑，3 轮感染后，被感染的电脑会超过 700 台。

【标注】【知识点】一元二次方程的传播问题

8. 2019~2020 学年 3 月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第 18 题 3 分 ★★

有一人患了某种流感，在每轮传染中平均一个人传染 x 个人，在进入第二轮传染之前有两人被及时隔离治疗并治愈，若两轮传染后还有 24 人患流感，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【备注】 注意在第二轮传染前有两人隔离，因此第二轮的基数发生变化需要 -2 ，因此不可直接用公式进行计算了

【答案】 5

【解析】 由题意，得 $1 + x - 2 + x(x - 2 + 1) = 24$ ，

$$\text{整理，得 } x^2 - 25 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 5 \text{ 或 } x = -5 \text{ (舍去负值)}.$$

故答案为 5。

【标注】【知识点】一元二次方程的传播问题

2. 枝干问题

【备注】 枝干问题要注意主干只长分支，接下来分支长小分支

栗子 8

9. 2020~2021 学年天津河西区初三上学期期中第 23 题 10 分 ★★

某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是 91，每个支干长出多少小分支？

若设每个支干长出 x 个小分支。

(1) 分析：根据问题中的数量关系，填表：

① 主干的数目为 _____ .

② 从主干中长出的支干的数目为 _____ . (用含 x 的式子表示)

③ 又从上述支干中长出的小分支的数目为 _____ . (用含 x 的式子表示)

(2) 完成问题的求解 .

【备注】 枝干问题要注意枝干为 x , 小枝干为 x^2

【答案】 (1) ① 1

② x

③ x^2

(2) 9个 .

【解析】 (1) ① 主干的数目为 1 .

② 从主干中长出的支干数目为 x .

③ 从支干中长出的小分支的数目为 x^2 .

(2) $x^2 + x + 1 = 91$

$$(x + 10)(x - 9) = 0$$

$$\therefore x_1 = -10 \text{ (舍)} , x_2 = 9 .$$

答 : 每个支干长出 9 个小分支 .

【标注】 【知识点】一元二次方程的传播问题

四、单循环问题

n 支球队 , 采取双循环赛制 , 则共需比赛 $n(n-1)$ 场 ;

若采用单循环赛制共需比赛 $\frac{n(n-1)}{2}$ 场

【备注】 常见的单循环问题 : 握手 , 打电话 , 单循环比赛等 .

常见的双循环问题 : 互送礼物 , 主客场比赛 , 每两只球队进行两场比赛等 .

送贺卡问题和握手问题不同 , 握手只要两个人完成一次握手就代表了你和我完成了握手 , 同时我和你也完成了握手 , 即动作不重复进行 . 所以最终的式子要除以 2 , 去掉重复 .

而送贺卡问题 , 为了表示礼尚往来 , 我送你一张贺卡 , 你也要送我一张贺卡 , 动作是重复进行 . 所以最终式子不用除以 2 .

栗子9

10. 2020~2021 学年 10 月天津和平区天津市第六十一中学初三上学期月考第 16 题 ★★

侨外生物兴趣小组的学生，将自己收集的标本向本组其他成员各赠送一件，全组共互赠送 56 件，则全组有 _____ 名同学。

【备注】送礼物为双循环问题

【答案】 8

【解析】 设全组有 x 名同学。则 $x(x-1) = 56$ ，
解得 $x_1 = 8$ ， $x_2 = -7$ （舍），
∴共有 8 名同学。

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

栗子10

11. 2017~2018学年2月天津天津市第二南开中学初三下学期月考第8题3分 ★★

某航空公司有若干个飞机场，每两个飞机场之间都开辟一条航线，一共开辟了 10 条航线，则这个航空公司共有飞机场（ ）。

- A. 4个 B. 5个 C. 6个 D. 7个

【备注】航线开辟一个即可实现双向流动，因此为单循环

【答案】 B

【解析】 飞机场可以看作是点，航线可以看作过点画的直线，设有 n 个机场就有 $\frac{n(n-1)}{2} = 10$ ，
解得 $n = 5$ 或 $n = -4$ （舍去）。

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

12. 2021年天津河西区初三中考二模第7题3分 ★

要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式，每两队之间都赛一场，计划安排 15 场比赛。设比赛组织者应邀请 x 个队参赛，则 x 满足的关系式为（ ）。

- A. $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$ B. $\frac{1}{2}x(x+1) = 15$ C. $x(x+1) = 15$ D. $x(x-1) = 15$

【备注】“每两队都赛一场”典型单循环问题

【答案】 A

【解析】 每支球队都需要与其他球队赛 $(x-1)$ 场，但 2 队之间只有 1 场比赛，
所以可列方程： $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$ 。
故选 A。

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

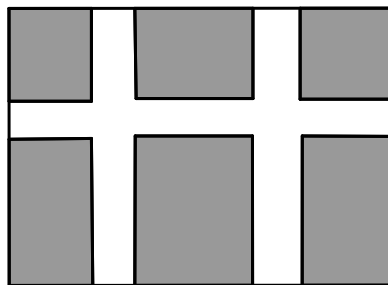
五、几何问题

栗子11

面积问题

13. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期中第8题3分 ★★

如图，学校课外生物小组的试验园地的形状是长 35 米、宽 20 米的矩形．为便于管理，要在中间开辟一横两纵共三条等宽的小道，使种植面积为 600 平方米，则小道的宽为多少米？若设小道的宽为 x 米，则根据题意，列方程为（ ）．



A. $35 \times 20 - 35x - 20x + 2x^2 = 600$

B. $35 \times 20 - 35x - 2 \times 20x = 600$

C. $(35 - 2x)(20 - x) = 600$

D. $(35 - x)(20 - 2x) = 600$

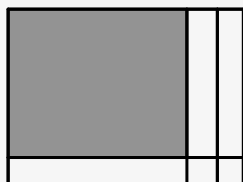
【备注】利用平移法，将空白部分分别移到右侧与下方，整体求阴影部分面积

A选项少减了一个竖直小道面积；B选项多减了两个竖直、水平重叠的正方形面积；

D选项平移后矩形的长宽表示错误

【答案】C

【解析】如图，



设小道的宽为 x m，

则种植部分的长为 $(35 - 2x)$ m，宽为 $(20 - x)$ m，

由题意得： $(35 - 2x)(20 - x) = 600$ ，

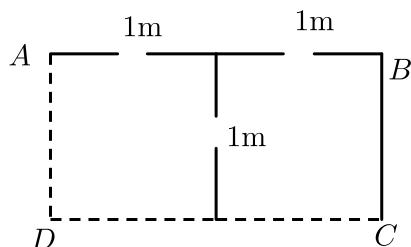
故选 C．

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

篱笆围矩形问题

14. 2019~2020学年12月天津和平区天津市兴南中学初三上学期月考第21题 ★★★

如图，利用两面靠墙（墙足够长），用总长度 37 米的篱笆（图中实线部分）围成一个矩形鸡舍 $ABCD$ ，且中间共留三个 1 米的小门，设篱笆 BC 长为 x 米。



- (1) $AB =$ _____ 米。（用含 x 的代数式表示）
- (2) 若矩形鸡舍 $ABCD$ 面积为 150 平方米，求篱笆 BC 的长。
- (3) 矩形鸡舍 $ABCD$ 面积是否有可能达到 210 平方米？若有可能，求出相应 x 的值；若不可能，则说明理由。

【备注】 篱笆围矩形开小门问题：

需留出 3 个 1m 的小门，相当于篱笆长度围 40m， $\therefore AB = 40 - 2x$

【答案】 (1) $40 - 2x$

(2) 15 米或 5 米。

(3) 不可能。

【解析】 (1) $\because$ 中间共留三个 1 米的小门，

$\therefore$ 篱笆总长要增加 3 米，篱笆变为 40 米，

设篱笆 BC 长为 x 米，

$\therefore AB = 40 - 2x$ （米）。

故答案为： $40 - 2x$ 。

(2) 设篱笆 BC 长为 x 米。

由题意得： $(40 - 2x)x = 150$ ，

解得： $x = 15$ ， $x = 5$ 。

$\therefore$ 篱笆 BC 的长为：15 米或 5 米。

(3) 不可能。

$\because$ 假设矩形鸡舍 $ABCD$ 面积是 210 平方米，

由题意得： $(40 - 2x)x = 210$ ，

整理得： $x^2 - 20x + 105 = 0$ ，

二次方程中 $\Delta < 0$ ，

$\therefore$ 方程无解 .

故矩形鸡舍 $ABCD$ 面积不可能达到 210 平方米 .

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题